

# Kermack-McKendrickモデルの高校数学における 教材化へ向けた一考察

佐々木 隆 宏

## 要 旨

数学教育においては、何をどのように教えるかが問題となる。その中の一つの考え方として、現実の問題を題材として数学を教えるという考え方もある。確かに算数ならば現実の問題を題材として教えることができる。しかしながら、高校における数学の場合は、適切な題材があまりないといえる。そこで、本研究では新型コロナウイルスの感染者数予測で市民の間でも知られることとなったKermack-McKendrickモデルを題材とした高校数学における教材化へ向けて考察した。このモデルを理解するためには微分方程式の知識が必要となるが、多くの高校生にとって微分方程式は未習である。そこで、連続変数を離散変数で代用することにより、数列の知識のみを用いた教材開発の可能性が示唆された。

## 1. はじめに

数学教育では、つねに数学をどのように教えるかが問題となる。日本の近代学校教育制度が安定し、教育の目的や内容、方法の原型を獲得した20世紀初頭において、日本初の国定教科書『尋常小学算術所』導入(1905)の編纂に大きく関わった藤沢利喜太郎(1861-1933)の影響から、通称「黒表紙教科書」では、問題の解き方が簡潔に示され、学習者は、それを模倣、反復することにより学んでいた。黒表紙教科書は学習者中心につくられていなかった。それは、当時、日本では、欧米化に伴う国際社会への参加のために、国民個人の人格形成といった陶冶的な目的よりも、国民思想の統一という意図が込められていたからであろう。

その同時期に、工学者であり数学者でもあるジョン・ペリー(J.Perry, 1850-1920)は、1901年のイギリス・グラスゴーにおいて行われた講演において、数学の学習は国民に専門家になることを要求しているわけではないこと、数学教育を形式陶冶ではなく「有用性」を軸に据えた実質陶冶で捉えるべきだと主張している。19世紀のイギリスにおける産業革命により科学教育や数学教育の必要性が高まっていたが、そのときに数学教育の改革において中心的な役割を担ったのがペリーである。彼は工学者でもあったため、ユークリッド原論を中心とした、当時のイギリスにおける数学教育を批判し、数学の「有用性」を重視したのである。この主張は、後に「ペリーの数学教育運動」とよばれるまでに拡がりをみせ、日本を含む世界中の国々の数学教育に影響を与えた。

数学の有用性に焦点化して数学教育を捉える世界的な潮流は、その後も衰えることはなかった。オランダの数学者であるハンス・フロイデンタール (H.Freudenthal, 1905-1990) は、数学を閉じた体系としてではなく、現実を数理化する過程を教えるべきであると主張した (Freudenthal, 1968, 1973, 1991)。彼の主張は、ロマンス語圏における科学・人間の傾向であり、科学としての数学、人間的で教育的な考えに関心をもち、科学としての数学と、その構造を人間の営みの結果として導くことが狙いであると考えられる。彼の考えによれば、数学の学習過程は、児童・生徒が教師に支援されながら再発明していくことになる。実際の指導では、数学的なトピックは、児童・生徒の幅広い生活から始まり、学習の進度に伴い、数学的な要素からも始まる。フロイデンタールの考えは、その後もRME理論 (The Realistic Mathematics Education Theory) や問題解決学習を中心とするMEA理論 (Model Eliciting Approach) に受け継がれている。

20世紀終盤から21世紀に入る頃、数学教育の新たな捉え方が主張されるようになってきた。数学教育学者であるカイトル・クリスティン (C.Keitel) が2007年に来日して講演を行った際、民主主義において、社会に蔓延している数学の使用や悪用を補強するような数学や科学技術を批判的に見ていけるような市民の育成を強調としている (カイトル・クリスティン, 2007)。カイトルの主張は社会や政治の中で独立して判断できる市民、公平さを追求する市民の育成を提唱する批判的数学教育 (Skovsmose, 1994, 2005) の考え方である。現在のように科学技術が発展すると、市民は、高度な数学や科学技術を用いて得られた結果や産物について、ただ受け入れるだけになる傾向がある。例えば、日常生活でも欠かせないパスワードや暗号理論は高度な数学を基盤とする。しかしながら、市民は暗号理論や、そこで使われている数学を理解することなく、パスワードや暗号を日々利用している。したがって、誰かが数学を悪用しようとするれば可能であり、そのことは民主主義の根幹を揺るがすことにもなりかねない。そこで、批判的数学教育では、児童・生徒にとって大切な能力は、もはや数理化して数学的モデルをつくり解決していくことではなく、社会の中で使用されている数学を批判的に分析することにあるという考え方を主流としている。

批判的数学教育と並行して、1980年頃から数学的モデリングの重要性も主張される研究が増えてきている (Pollak, 1979; Burghes&Borrie, 1978; Burkhardt, 1981; Kaiser, 1991; Kaiser & Sriraman, 2006; 池田, 2017)。数学的モデリングは、現実世界の事象を数学的に表現して解決するものであり、ペリー以来の数学の有用性を重視する数学教育の流れを汲むものである。さらに、2000年代に入ると、2000年代に入ると、様々な議論はあるものの、世界各国の国定カリキュラムの中に数学的モデル、数学的モデリングが重要な構成要素として徐々に位置付けられるようになった (Ikeda, 2007; 西村, 2012)。

日本においても平成20年告示の中学校学習指導要領 (文部科学省, 2008) 及び平成21年告示の高等学校学習指導要領 (文部科学省, 2009) において、直接的な言葉は用いられていないが、数学的モデリングの内容について触れられるようになった。さらに、平成28年12月の中央教育審議会答申において、「算数・数学の学習過程のイメージ」が示されたが、それは算数・数学の学習において数学的モデリングを一層強調するものである。しかしながら、現実の世界を数学的に捉えて解決することは、日常生活と結びつきの強い算数であれば、以前から算数の授業において行われているが、高等学校で教えられている数学は現

実の世界との関連で教えられることが少ない。令和3（2021）年度以降の大学入学共通テストの「数学ⅠA」や「数学ⅡB」で現実の世界と関連させた内容が出題されるようになっているが、高等学校の数学教科書は、これまで通り、現実の世界と切り離された数学の世界に閉じた内容となっている。高等学校の数学を現実の世界と結びつけて教えようとしても、素材がないという現状がある。したがって、高等学校の数学を現実の世界と結びつけて教えるための素材、教材研究、授業デザインが必要とされている。

そのような中、2019年に中華人民共和国で報告された新型コロナウイルス感染症（coronavirus disease 2019; COVID-19）により、世界中が混乱に陥った。COVID-19によるリスクに対して人々は未知性イメージを形成し、どのような感染症か、感染力はどの程度か、感染経路は何か、流行収束へ向けた対策は何かなど、COVID-19は世界中の人々を混乱に陥れていった。メディアなどでは毎日のように数学を用いた感染者数の予測や、感染防止策などが流れていた。「3密」、「クラスター」、「ロックダウン」、「オーバーシュート」、「基本再生産数」などの言葉が次々と飛び交い、専門家の間でも意見が異なり、一般市民の中でも、指示に従う人、噂に振り回される人、報道されている内容を疑う人などがいた。当時、毎日のようにメディアでは、グラフを根拠として予測などの主張が繰り返されていたが、感染者数を予測する際には数学的モデルが使用されていた。それまで一般市民には知られていなかった「SIRモデル」という言葉も広く認知された。そのような状況下において、一般市民に求められたのは、数学的モデルを用いて得られた結果を批判的に考察することであり、このことは、批判的数学教育の主張するものである。したがって、感染者数の予測は数学教材の素材となり得る。

## 2. 研究の目的と方法

高等学校の数学を現実の世界と結びつけて教えるための素材として、SIRモデルを用いた感染者数予測が考えられる。ただし、感染者数予測に使われた数学的モデルは高等学校の範囲を超える数学の知識を必要とすることや、複雑な構造であるため、高等学校の範囲で教材化を検討する本研究では、前期Kermack-McKendrickモデル（初期型モデルなので予測精度が落ちるが単純構造のため教材化に適していると思われる）に焦点化する。そこで、本研究では前期Kermack-McKendrickモデルを題材とした高校数学の教材化について検討することを目的とする。

方法は、まず、初期型モデルを含めてKermack-McKendrickモデルについて概観する。次に、高等学校の数学の範囲内で前期Kermack-McKendrickモデルを素材とした教材を構成するための原理を整理した後、教材構成原理に基づいて数学教材を構成する。ただし、構成する教材は感染者数の予測の内容には必要以上に踏み込まず、あくまでも数学教育における教材として位置付ける。また、数学教育において教材開発を行なう場合、教材の効果まで含めて検討することが多いが、本研究では教材を構成するまでに留め、教材の効果については、改めて検証することとする。さらに高校数学の教材化を検討する本研究の目的に照らしわせると、数学的に厳密な展開を行うものでもなく、また、医学的に厳密な感染症予測をすることが目的ではない。数式から導かれる感染症対策は、感染症に関して科学的に導かれたものではないことから、学習者に対して、実際には専門的な知識が必要と

なることを伝えておく必要がある。

### 3. Kermack-McKendrickモデル

感染症に関する数学的モデルの研究は18世紀のBernoulliにまで遡るといわれているが、1927年に初期モデルが発表され、その後、様々に改良が加えられている。

1927年に発表されたKermack-McKendrickモデルは、局所的な人口におけるペストなどの急速かつ短期的な流行に関するモデルである（稲葉，2000）。流行の期間が短いために宿主人口の人口動態は無視できると考えられる。そして、人口を「感受性人口」(Susceptible)、「感染人口」(Infections)、「隔離された人口」(Removed)に分類し、それぞれ時刻  $t$  の連続関数として、 $S(t), I(t), R(t)$  と表す。ここで、「感受性人口」とは、一度も感染していない、つまり、免疫を獲得していないことから、今後、感染する可能性のある人の数を表す。「感染人口」とは、感染している人の数を表す。「隔離された人口」とは、回復による免疫保持者あるいは感染が原因とする死亡者数を表す。このとき、Kermack-McKendrickモデル（SIRモデル）は、以下のように常微分方程式で表すことができる。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\lambda S(t)I(t) \quad (3.1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lambda S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (3.2)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (3.3)$$

ここで、 $\lambda$  は感染率、 $\gamma$  は隔離率である。感染症が報告される初期の状態では集団全体が感受性人口であることから、そのサイズを  $N$  とすれば、式 (3.2) より、次の線形化方程式を得る。

$$I'(t) = \lambda NI(t) - \gamma I(t) \quad (3.4)$$

これから、閾値条件、つまり、ウィルスが集団に侵入可能となる条件は、 $I'(t) > 0$  より、

$$R_0 = \frac{\lambda N}{\gamma} > 1 \quad (3.5)$$

となる。 $R_0$ は基本再生産数と呼ばれ、集団全体が感受性人口となる初期状態において、一人の感染者が再生産する二次感染者数の平均値である。したがって、 $R_0$ が1よりも大きい場合、初期の感染者数は指数関数的に増加することになるが、 $R_0$ が1よりも小さい場合は閾値現象が生じ、流行には至らない。

新型コロナウイルス感染症の流行をめぐる報道においても使われていた。

式 (3.1) から (3.3) までのモデルは短期的な流行に関するモデルであったが、長期的な流行に関する感染者数の予測には、次のように拡張されたモデルが用いられる。 $b$  を宿主人口の出生率、 $\mu$  を自然死亡率とすれば、

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - \mu S(t) - \lambda S(t)I(t) \quad (3.6)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lambda S(t)I(t) - (\gamma + \mu)I(t) \quad (3.7)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\mu R(t) + \gamma I(t) \quad (3.8)$$

ここで、隔離された人口  $R(t)$  は免疫保持者を意味する。ただし、このモデルでも人口の感受性の変動や感染力などは考慮していないことから、感染症流行の本質的な部分まで捉えているとは言い切れない。そこで、人口の感受性の変動や感染力などを考慮したモデルが発表され、後期Kermack-McKendrickモデルとよばれ、これまでのモデル（前期Kermack-McKendrickモデル）と区別している。後期Kermack-McKendrickモデルは以下のように偏微分方程式を用いて定式化される（稲葉, 2000）。

$S(t, \tau)$ ,  $I(t, \tau)$ ,  $R(t, \tau)$  をそれぞれ時刻  $t$ 、感受性状態になってからの経過時間  $\tau$  における感受性人口の密度関数、感染人口の密度関数、回復して部分的に免疫化された人口の密度とする。 $m$ ,  $\mu$  はそれぞれ粗出生率、粗死亡率を表し、 $\gamma(t)$  は感染時間  $\tau$  における回復率、 $\beta_1(\tau)\beta_2(\sigma)$  は感染時間  $\sigma$  の感染者から持続時間  $\tau$  における感受性個体への感染率とする。

$$\frac{\partial S(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial S(t, \tau)}{\partial \tau} = -\mu S(t, \tau) - S(t, \tau)\beta_1(\infty) \int_0^\infty \beta_2(\sigma)I(t, \tau)d\sigma \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial I(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial I(t, \tau)}{\partial \tau} = -(\mu + \gamma(\tau))I(t, \tau) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial R(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau} = -\mu R(t, \tau) - R(t, \tau)\beta_1(\tau) \int_0^\infty \beta_2(\sigma)I(t, \tau)d\sigma \quad (3.11)$$

$$S(t, 0) = m \int_0^\infty \{S(t, \tau) + I(t, \tau) + R(t, \tau)\}d\tau \quad (3.12)$$

$$I(t, 0) = \int_0^\infty \{\beta_1(\infty)S(t, \tau) + \beta_1(\tau)R(t, \tau)\}d\tau \int_0^\infty \beta_2(\sigma)I(t, \tau)d\tau \quad (3.13)$$

$$R(t, 0) = \int_0^\infty \gamma(\tau)I(t, \tau)d\tau \quad (3.14)$$

$$S(0, p) = S_0(p), I(0, p) = I_0(p), R(0, p) = R_0(p) \quad (\text{初期条件}) \quad (3.15)$$

上の式 (3.9) から (3.15) に対して、次のように補足しておく。

$\gamma, \beta_1, \beta_2 \in L_+^\infty(\mathbb{R}_+)$  であり、 $\beta_1(\tau)$  は単調増加とする。感染時間  $\sigma$  の感染者からまったく感染経験のない感受性人口への感染率は  $\beta_1(\infty)\beta_2(\sigma)$  で与えられる。ただし、 $\beta_1(\infty) := \sup_{\gamma \geq 0} \beta_1(\tau)$  である。このことから、感染個体における感染力の変化が  $\beta_2(\tau)$ 、感受性個体における感受性の変動は  $\beta_1(\tau)$  であり、それが単調増加と仮定したことから感受性個体の免疫性が時間の経過とともに減衰することになる。そして、感染率と感受性の変動が独立しているという仮定のもとで、感染率はそれらの積で表される。

また、集団の総人口を  $N$  とするとき、基本再生産数は、次式で表される。

$$R_0 = N\beta_1(\infty) \int_0^\infty \beta_2(\zeta) e^{-\mu\zeta - \int_0^\zeta \gamma(\sigma) d\sigma} d\zeta \quad (3.16)$$

以上が前期及び後期のKermack-McKendrickモデルである。高校数学の範囲で教材化を検討しようとする場合、学習者のもつ数学的な知識を考慮すると、常微分方程式で定式化されているとはいえ、偏微分や広義積分を含まない前期Kermack-McKendrickモデルをもとに教材化を検討することにする。ただし、予測精度は落ちるが、予測精度を高めようとする場合にはより高度な数学的知識を必要とすることを学習者に伝えておけば、数学教材としては充分成立するものと思われる。

#### 4. 教材構成原理

Kermack-McKendrickモデルを用いて感染症予測に関する数学教材の検討はいくつかの研究は行われているが、いずれの研究も高校生の認知発達段階を考慮したものではない(佐藤, 2021; 松浦, 2021; M.Jensen&C.Winslow, 2021)。そこで、高校生の認知発達段階を考慮して、教材開発原理として整理する。

本研究で検討する教材の対象者は、高等学校の数列を学習しているが、微分法や微分方程式は未習の学習者を想定する。微分方程式を未習の学習者が、微分方程式で表現された数学的モデルを用いた学習を行うことはできない。この場合、学習者が学習に必要な数学的知識を新たに学ぶ、あるいは、本質を損なわない程度に数式を学習者の持つ知識・技能にあわせて代替概念で表現することが考えられる。前者の方法は、微分法、積分法、微分方程式など、学ぶ必要があることから、例えば、中学生や高校生、微分積分が未習の大学生にとって、学習に必要な多くの時間が必要であることや、学習の負担が大きいため、物理的にも制限がかかり、認知的な負荷も大きい。したがって、授業を構成、教材を開発する場合、後者の方法を選択することが現実的である。

後者の方法で授業を構成、教材を開発しようとする場合、数式を学習者の持つ知識・技能にあわせて代替概念で表現するだけでなく、教材構成原理について検討しておかなければならない。学習者の持つ知識・技能で理解可能な数式が与えられただけでは、学習者は学習を遂行することができないからである。そこで、微分方程式で表現された数学的モデルの離散化により現実事象をシミュレーションする教材構成原理を次の5項目に整理する。

- (P-1) 学習者の数学的知識・技能に応じた数学的モデルの構成方法の理解過程を設ける。
- (P-2) 微分方程式を未習の学習者に合わせ、本質を保持しながら数学的モデルを離散化する。
- (P-3) 数学的モデルが適用可能な問題場面を設定し、その妥当性について検討する。
- (P-4) 妥当性のある初期条件を与える、あるいは検索する場面を設定する。
- (P-5) 初期条件を様々に変化させる場面を設け、シミュレーション結果を比較・検討する場面を設ける、または、比較可能な現実の結果がある場合は、シミュレーション結果と現実の結果を比較する場面を設ける。

以下、教材構成原理のそれぞれの項目について説明する。

(P-1) 学習者の数学的知識・技能に応じた数学的モデルの構成方法の理解過程を設ける

実用的傾向では児童・生徒の中に既に構成された算数・数学の知識を用いて数学的モデルをつくることに焦点を当てている。一方、科学・人間的傾向のRME理論では、数学的知識が未だ存在していない状態で児童・生徒の中に構成されるものをモデルと呼んでいる。つまり、児童・生徒の内的な世界に構成されるシェマをモデルとして包括的に表現し、モデルの変容を数学的概念の理解の進化としてとらえている。どちらの立場も数学的モデルをつくることに焦点を当てているが、現実の世界で用いられている数学的モデルの中には、児童・生徒が構成することが困難なモデルもある。学習者にとって高度な数学を用いる数学的モデルも多い。それでは、児童・生徒に、学習に必要な数学的な知識や技能が備わるまで待つのだろうか。佐々木（2020）は伝播中心頂点群に基づいた演繹的な論理構造表現グラフを利用して学習者にとって高度な数学を利用したRSA暗号の教材を開発している。また、佐々木（2018）は、そのような場合における数式との関わり方として、数式の意味的解釈を提唱している。完成された数式、数学的モデルの意味を学習者の持つ数学的知識や技能で解釈しようとするものである。しかしながら、それは、完成された数式、数学的モデルの意味について解釈する立場であったが、批判的数学教育の立場では、「数式の意味的解釈」では不十分であるといえる。批判的数学教育は、それらの数学的モデルを作り、問題を解決していくのではなく、社会の中で使用されている数学を批判的に分析することにあるという考えである。そのためには、可能な範囲において、数学的モデルの構成方法について理解する過程が必要であろう。

(P-2) 本質を保持しながら常微分方程式で表された数学的モデルを離散化する

本研究では、学習者対して微分法や微分方程式の知識・技能を前提としていない。そこで、微分方程式を解くのに微分を有限差分近似で置き換えて得られる差分方程式で近似する離散化の手法を適用する。したがって、教材構成原理の第1項目（P-1）の「学習者の数学的知識・技能に応じた数学的モデルの構成方法の理解過程を設ける」場合には、離散化された式の構成方法の理解過程を設ければよいことになる。

(P-3) 数学的モデルが適用可能な問題場面を設定し、その妥当性について検討する

数学的モデルがどのような場面で適用可能であり、その数学的モデルを用いることで何がわかるのかについて検討し、教材に反映させなければ、数学的モデルは有益なものとは正反対の、役立たないものになってしまう。例えば、地球温暖化問題を題材とした数学教育における教材には、特定の地域の最高気温を数年間にわたり記録したデータをグラフ上にプロットし、回帰直線で近似する内容のものがある。このとき、このとき、回帰直線を用いて100年後の気温を予測することは、問題場面の設定として妥当ではない。予想に用いる期間が長くなればなるほど直線による近似は意味をもたなくなる場合はあるからである。

(P-4) 妥当性のある初期条件を与える、あるいは検索する場面を設定する

数学的モデルを用いてシミュレーションを行う場合、モデルの適用に必要な初期条件を与える必要がある。例えば、新型コロナウイルスの感染者数を予測場合、ある日を出発点として、その日の感染者数を初期条件とする場合と、その1週間後を出発点として、その

日の感染者数を初期条件とする場合では、同じ数学的モデルから得られる結論にも差が生じるのは当然である。また、数学的モデルを適用して感染者数を予測する場合、その時点での事実を反映させた値は初期条件のみであり、その後に得られる数値は、その先を予測するものである。したがって、初期条件は学習者にとって、現実と照らし合わせて妥当な数値でなければならない。可能ならば、インターネットで初期条件に関して信頼できる情報を入手することが望ましい。

(P-5) 初期条件を様々に変化させる場面を設け、シミュレーション結果を比較・検討する場面をつくる、または、比較可能な現実の結果がある場合は、シミュレーション結果と現実の結果を比較する場面を設ける

シミュレーションの特徴として、初期条件の変化によりシミュレーションの結果がどのように変化するかについて調べることが容易であることがあげられる。特に、シミュレーションによって将来の結果を予測する際には、現在の状況が初期条件になることが多い。したがって、現在の状況をどのように制御すれば、つまり、初期条件をどのような条件にすれば、予想される結果を満足するものとなるかを検討する事も可能である。そのためには、初期条件を様々に変化させる場面を設定し、シミュレーション結果を比較・検討する場面をつくることが要請される。

また、シミュレーションした結果が過去の期間の内容であり、既に現実の結果が得られている場合、例えば、2022年1月1日から同年1月31日までのある県内の新型コロナウイルス新規感染者数のシミュレーションを行った時点が2022年8月1日であれば、既に当該県庁のホームページ等で現実の結果が得られているはずである。そのような場合には、シミュレーション結果と現実の結果を比較する場面を設けることにより、両者の間の違いは何か、何故違っているのかを検討することにより、モデルを批判的に分析することが可能となる。

以上が、高等学校の数学の範囲内で前期Kermack-McKendrickモデルを素材とした教材を構成するための原理である。また、モデルで使用される文字に関して、ギリシャ文字は高校生には馴染みがないと思われることから、ギリシャ文字はアルファベットに置き換えるなど、学習者にとって理解を妨げる原因となる細かい内容についても配慮する必要があるだろう。

## 5. 教材構成原理に基づいた教材の構成

### (1) Kermack-McKendrickモデルの構成

授業構成原理の第1項目(P-1)において「学習者の数学的知識・技能に応じた数学的モデルの構成方法の理解過程を設ける」が要請されている。そこで、Kermack-McKendrickモデルの構成方法について概観する。このモデルは一旦常微分方程式で表現されるが、「(微分法や微分方程式が未習であると想定する)学習者の数学的知識・技能に応じた数学的モデル」とするために離散化する。これにより教材構成原理の第2項目(P-2)が満たされる。

このモデルでは、人口を「感受性人口」(Susceptible)、「感染人口」(Infections)、「隔離された人口」(Removed)に分類し、それぞれ時刻  $t$  の連続関数として、 $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$

と表す。ここで、「感受性人口」とは、一度も感染していない、つまり、免疫を獲得していないことから、今後、感染する可能性のある人の数を表す。「感染人口」とは、感染している人の数を表す。「隔離された人口」とは、回復による免疫保持者あるいは感染が原因とする死亡者数を表す。

時刻  $t$  から微小時間  $\Delta t$  だけ経過したときの感受性人口、感染人口、隔離された人口の変化量はそれぞれ以下ようになる。なお、第3章ではギリシャ文字を使用したか、教材化にあたっては、可能な限りギリシャ文字をアルファベットに置き換えることにする。

$$S(t + \Delta t) - S(t) = -S(t) \times I(t) \times \Delta t \times a \quad (5.1)$$

$$I(t + \Delta t) - I(t) = S(t) \times I(t) \times \Delta t \times a \quad (5.2)$$

$$R(t + \Delta t) - R(t) = I(t) \times \Delta t \times b \quad (5.3)$$

(5.1), (5.2) の比例定数  $a$  は感染率, (5.3) における  $b$  は隔離率である。ここで、感染人口の変化量  $I(t + \Delta t) - I(t)$  において、隔離された人口だけ調整する必要があることから、次のように修正される。

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) - S(t) &= -aS(t)I(t)\Delta t \\ I(t + \Delta t) - I(t) &= aS(t)I(t)\Delta t - bI(t)\Delta t \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$R(t + \Delta t) - R(t) = bI(t)\Delta t$$

これらから、次のKermack-McKendrickモデルを得る。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -aS(t)I(t) \quad (5.5)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t) - bI(t) \quad (5.6)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = bI(t) \quad (5.7)$$

本来のKermack-McKendrickモデルは感染率を考慮して偏微分方程式や広義積分により定式化され、常微分方程式とは異なるのであるが、本研究で想定する学習者の数学的な知識を考慮すると、常微分方程式で表現された初期型モデルが対象である。

## (2) Kermack-McKendrickモデルの離散化

続いて微分方程式で表現されたKermack-McKendrick感染症モデルを離散化する。その方法は連続変数から離散変数に置き換えることになる。本モデルの場合、時刻  $t$  が連続変数であるが、この変数を離散化する場合、2通りの方法が考えられる。

第1の方法は、時刻を小刻みに変化させる。

$$S(t + \Delta t) = S(t) - aS(t)I(t)\Delta t \quad (5.1)$$

$$I(t + \Delta t) = I(t) + aS(t)I(t)\Delta t - bI(t)\Delta t \quad (5.2)$$

$$R(t + \Delta t) = R(t) + bI(t)\Delta t \quad (5.3)$$

例えば、ある時刻から0.1秒おきに变化させる場合は式 (5.1), (5.3), (5.4) において  $\Delta t = 0.1$  とする。この方法により、1 日の中の感染者数の変化も把握することができる。

第2の方法は、時刻を1日単位に変化させる。

$$S(n+1) = S(n) - aS(n)I(n) \quad (5.1)$$

$$I(n+1) = I(n) + aS(n)I(n) - bI(n) \quad (5.2)$$

$$R(n+1) = R(n) + bI(n) \quad (5.3)$$

式 (5.1), (5.3), (5.4) において、時刻  $t$  を  $(t=) n$  日と捉え、1 日毎に変化 ( $\Delta t = 1$ ) させる方法が第2の方法である。

どちらの方法も本質的には同じである。第1の方法は、時刻を小刻みに変化させることから、元々離散変数で表現されていたモデルに近いシミュレーション結果が得られるという特徴を持つが、数学科における授業や教材では、第2の方法がより適していると考える。その理由は2つある。

第1の理由として、自治体から新型コロナウイルス感染症における感染者数が日毎に発表されることから、本モデルにより予測した結果と実際の感染者数の比較が容易になるからである。

第2の理由として、方法2のモデルは漸化式表現であり、学習者にとって学習しやすいと考えられるからである。漸化式は平成30年告示の高等学校学習指導要領（文部科学省，2018）において「数学B」で学習する内容である。また、漸化式の内容を学習していなくとも、漸化式を用いた反復計算は、漸化式の学習の初期段階に位置付けられており、漸化式に関する知識をそれほど必要としないこと、また、反復は数学的思考を支える生得的構造の一つと考えられているからである（Tall, 2013）。

教材の構成について2つの方向性が考えられる。

第1に、本モデルを用いて感染者数等を予測する内容とすることである。ただし、本研究では数学教育の視座から教材化を検討するものであり、医学的に厳密な感染症予測をすることが目的ではない。

第2に、本モデルの数式やシミュレーションの結果を考察して何らかの教訓を抽出する内容とすることである。ただし、数式から導かれる感染症対策は、感染症に関して科学的に導かれたものではないことから、学習者に対して、実際には専門的な知識が必要となることを伝えておく必要がある。

〔1〕過去のデータを用いて感染者数等を予測して現実の結果と比較し、批判的に検討する

第1の方向性に対する2種類の授業について述べる。まず、一つ目は、過去の現実のデータを用いて本モデルにより感染者数の予測をシミュレーションし、現実の感染者数と比較する授業である。現実の感染者予測の場面であることから、数学的モデルが適用可能な問題場を設定していることになり、また、その妥当性もあるといえる。また、ある時点での現実の感染者数を初期条件とすることから、初期条件にも妥当性がある。シミュレーションの結果と現実の感染者数との間に違いが生じていれば、学習者にその理由を考えさせたり、モデルの限界について批判的に検討する授業が展開可能である。過去のデータを用いることにより、現実の結果が用意されていることから、現実のデータとモデルを用いたシ

ミュレーションの結果が容易に比較することができる。これにより、授業構成原理の第5項目（P-5）を満たす。

〔2〕最新の公表データを初期条件として感染者数を予測し、今後の感染者数の変化と比較する

第1の方向性に対する2番目の授業としては自治体ホームページ等で公表されている感染者数に関する最新の公表データを初期条件として今後の感染者数を実際にシミュレーションすることが考えられる（図1）。この場合、現実の結果が、得られておらず、これから起こる結果と比較することになる。したがって、毎日のように発表される感染者数を記録し、予測した結果と比較することから、授業時間中に完結する事はない。それ以上に、未だ起こっていない（数日後の）事を予測し、その予測結果が正しいかどうかを観察することは、学習者にとって真性の学びを提供することとなる。この場合も上の場合と同様に、授業構成原理のすべてを満たしている。

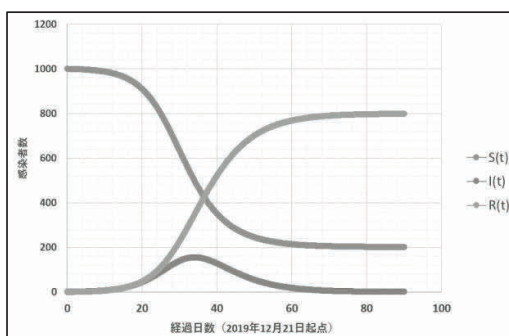


図1. 公表データを用いた感染者数予測

〔3〕本モデルの数式やシミュレーションの結果を考察して何らかの意味や教訓を抽出する

本モデルの数式やシミュレーションの結果を考察して何らかの意味や教訓を抽出し、リスクリテラシーの醸成を目的とする授業も考えられる。例えば、(5.1)を次のように変形する。

$$a = \frac{S(n) - S(n+1)}{S(n)I(n)} = \frac{1}{I(n)} \times \frac{S(n) - S(n+1)}{S(n)}$$

この式の右辺から、比例定数  $a$  は、1日のうちに感染と接触して、感染する確率を意味することがわかる。したがって、この値が「感染率」とよばれていることを理解することができる。

また、(5.3)を次のように変形する。

$$b = \frac{R(n+1) - R(n)}{I(n)}$$

この式の分母は第  $n$  日目における感染人口であり、分子は1日での隔離された人口の増分を意味することから、比例定数  $b$  は、1日の間に感染者が回復する確率を意味することがわかる。したがって、この値が「隔離率」とよばれていることを理解することができる。

さらに、(5.2)を次式のように変形する。

$$I(n+1) = \{aS(n) - b + 1\}I(n)$$

感染症発生初期の頃に限定すると、 $S(n) \approx S(0)$  と見做すことができることから、

$$I(n+1) \approx \{aS(0) - b + 1\} I(n)$$

これから、数列  $\{I(n)\}$  は公比  $aS(0) - b + 1$  の等比数列であると考え、その一般項は、

$$I(n) \approx \{aS(0) - b + 1\}^n I(0)$$

となる。これから、感染者数を減少させる、つまり、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $I(n) \rightarrow 0$  となるための条件は

$$(0 <) aS(0) - b + 1 < 1$$

となることである。さらに、この式を次のように変形する。

$$aS(0) - b + 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{aS(0)}{b} < 1$$

これから、 $\frac{aS(0)}{b}$  が 1 よりも小さい場合は感染者数が減少する傾向にあり、逆に 1 よりも大きい場合は感染者数が増加する傾向にあることがわかる。この値は、基本再生産数  $R_0$  であり、一人の感染者が、感染症に対する免疫を持たない集団において、直接感染させる人数の待値であり、2020年から2021年にかけてメディアのニュースでも頻繁に取り上げられた数値である。なお、上述の式展開や解釈は、高等学校の数学B「数列」の単元の知識のある学習者が理解可能なように行っているため、厳密な式展開や解釈は行っておらず、そのことは学習者に対して知らせておく必要がある。

## 6. 結論と今後の課題

本研究では前期Kermack-McKendrickモデルの高等学校における数学の教材化について検討した。常微分方程式が未習の高校生に対して、連続変数を離散変数で捉えなおすことにより、常微分方程式が未習であっても数学Bの単元「数列」における漸化式の知識を獲得している高校生が学習可能な教材化の可能性が示唆された。今後は、検討した教材の効果を検証する必要がある。

## 引用文献

- Freudenthal, H. (1968). Why to teach Mathematics so as to be useful, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.1 No1/2 D.Reidel, 3-8.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers.
- カイトル・クリスティン (1998). 21世紀の数学教育の展望—数学カリキュラム：だれに対してか、だれの利益か 第30回数学教育論文発表会講演録, 日本数学教育学会誌数学教育学論究, 70, 57-64.
- Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*, Mathematics

- Education Library, Kluwer Academic Publishers.
- Skovsmose, O. (2005). *Travelling Through Education-Uncertainty*, Mathematics, Responsibility, Rotterdam: Sense Publishers.
- Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects, In UNESCO(ed), *New Trends in Mathematics Teaching IV*, 232-248, Paris.
- Burghes, D. N. & Borrie, M. S. (1978). Mathematical Modelling, In Alan Rogerson (Ed.), *Cooperation Between Science Teachers and Mathematics Teachers*, ICSU Committee on the Teaching of Science, printed in England by John. Goodman & Sons (Printers) Ltd.
- Burkhardt, H. (1981). *The Real World and Mathematics*, Blackie, Glasgow.
- Kaiser, G. (1991). Application-Oriented Mathematics Teaching: A Survey of the Theoretical Debate, In M. Niss et al. (eds), *Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, 83-92, Chichester: Ellis Horwood.
- Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). *A global survey of international perspectives on modeling in Mathematics education*. ZDM, Vol.38(3), 302-310.
- 池田敏和 (2017). 『モデルを志向した数学教育の展開「応用指向vs構造志向」を超えて』, 東洋館出版社.
- Ikedo, T. (2007). Possibilities for, and Obstacles to Teaching Applications and Modelling in the Lower Secondary Levels, In Werner Blum, Peter L. Galbraith, Hans-Wolfgang Henn and Mogens Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*, The 14<sup>th</sup> ICMI Study, 457-462, New York: Springer.
- 西村圭一 (2012), 『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』, 東洋館出版社, 148-155.
- 文部科学省 (2008). 『中学校学習指導要領解説 数学編』, 教育出版.
- 文部科学省 (2009). 『高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編』, 実教出版.
- 稲葉寿 (2000), 伝染病流行の数理モデル,  
[https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~inaba/inaba2000\\_kaiyouken.pdf](https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~inaba/inaba2000_kaiyouken.pdf) -tokyo.ac.jp  
 (最終確認2023. 05. 02)
- 佐藤一 (2021), パンデミックと数学教育, 2021年度数学教育学会春季年会予稿集, 11-13.
- 松浦真也 (2021), 高校数学で理解する感染症の数理,  
<http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~matsuura/materials/sir.pdf> c.jp  
 (最終確認2023. 05. 08)
- M. Jensen & C. Winslow (2021), Questioning corona-a study and research path, *Teaching Mathematics and its Application: An International Journal of the IMA* (2021), 40, 154-165.
- 佐々木隆宏 (2020). 伝播中心頂点群に基づいたRSA暗号の教材開発-演繹的な論理構造表現グラフの利用-, 数学教育学会誌, 61, No.3・4, 1-10.
- 佐々木隆宏 (2018). 成人期における数式への関与についての一考察-数式の意味的解釈の可能性を探る-, 昭和女子大学『学苑』, No.929, 27-35.
- 文部科学省 (2018). 『高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編』, 学校図書.
- Tall, D. (2013), *How Humans Learn to Think Mathematically*, Cambridge University Press (磯田正美・岸本忠之の監訳『数学的思考-人間の心と学び-』, 83-118).

## A Study of the Kermack-McKendrick Model for Teaching Materials in High School Mathematics

Takahiro Sasaki

### **Abstract**

In mathematics education, the question is what to teach and how to teach it. One way of thinking about this is to teach mathematics using real-life problems as the subject matter. Certainly, arithmetic can be taught using real-life problems as the subject matter. However, in the case of high school mathematics, there are few appropriate subjects. In this study, the Kermack-McKendrick model, which is well known among citizens for predicting the number of people infected with a new type of coronavirus, is considered for use as a teaching material in high school mathematics. To understand this model, knowledge of differential equations is necessary, but many high school students have not yet learned differential equations. Therefore, by substituting discrete variables for continuous variables, the possibility of developing teaching materials using only knowledge of sequences is suggested.