

文科系の学生を対象とした数学教育の研究（2報）

土 井 努*

はじめに

文科系の学生にとって大学で数学を学ぶ事は、教養または資格試験の一部という位置づけになろうかと思われるが、多くの学生が不得意意識を持っている背景を考えると、授業を進める段階として、まず興味による動機付けを行ない、次に努力する以外に手はないという意識を起こさせ、そして最終的に達成感が得られるよう構成することが考えられる。本稿は過去数年間担当の授業である数学教育Ⅰ、Ⅱからの抜粋である。

ここでのテーマは①円の中心を探す：測量による宝探し、②近似と積分：円錐を例として、③加速度と慣性：エレベータによる実験 の3つであるが、まず学習者が内容を直感的に把握できるようにする事から始め、次に途中の計算過程において、一見困難に見えるが、努力するほど達成感が得られるように試みた。

授業の付随的な狙いとして、第1報では金融的なテーマを通して、節約と勤勉の大切さを配したが、ここでは数学の実用性を体験するためには、必ずしも高級なハイテク器材は必要でなく、古代人が用いたと思われるような簡単な道具類で十分であることを認識してもらう狙い、すなわち便利な装置が溢れている現代においても、本質は別の所にあるという事を認識してもらう目的もある。

1. 円の中心を探す：測量による宝探し

1.1 目的

中学校課程における円に関する定理を実際の問題に応用したとき、期待される結果が正確に得られる事を体験する。このため、校庭に半径約10 mの円を描いておき、このとき存在をわからなくした円の中心を、1回で探し当てるという実習を行う。なお、用いる用具は定規とコンパスに対応させて、測量用の水糸、ポール、ゴルフのピン、その他若干とし、角度および長さを直接測定する事はできないという、仮定を設けた。

1.2 授業内容

1.2.1 紙上での検討（図表1.1）

校庭での作業に先立って、配付用紙に予め描かれた円の中心を探し、そのとき適用した定理の精度を検討する。すなわち、円の半径は校庭の1/100縮尺を想定して約10 cm、使

* 茨城キリスト教大学 文学部 非常勤講師

用する定理は次の3つとした。(図表1.1参照) なお、円の中心は直径の二等分点として求める事にしたので、定理は直径の求め方となっている。

定理 A 直径に対する円周角は 90° である。

定理 B 任意の弦の垂直二等分線は、直径となる。

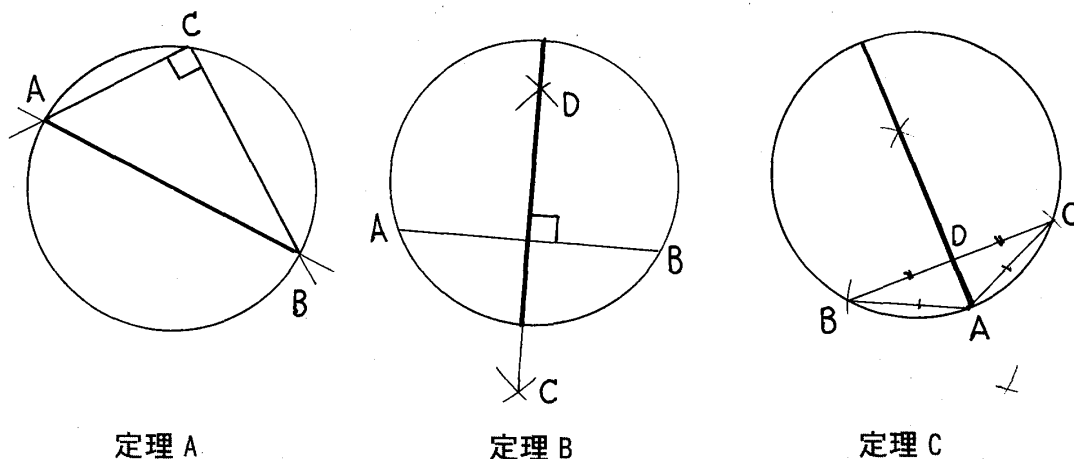
定理 C 上の定理における弦として、二等辺三角形の斜辺を用いる。

定理 C の作図は、任意の点 A から等距離の点 B, C を円上にとる。すると $\triangle ABC$ は、二等辺三角形となる。この斜辺 BC の中点を D とし、AD を延長すれば、直径となる。この定理は直角定規を用いる必要が無いので、簡単かつ精度が良いという利点を持っているが、これを紙上で確認し、校庭における実習に応用する。

1.2.2 校庭での実習

一班5人の構成で、二班が同時に進行し、自分の班で作成した円であるが、その中心をわからなくした時、これを次の手順で探し当てる。

- 約 10 m 前後の適当な長さの糸が与えられたとして、これを半径とした円を作る。円周上、約 1 m おきにゴルフのピンを地面に刺して行き、このピンを水糸で結ぶ。この円周の正確性が後の結果に大きく影響することを予め伝えておく。
- 円周が完成した時点で、円の中心に「宝」を隠す。なお、適当に芝生の生えた地面ならば宝の場所は、一旦そこを離れた後は全くわからなくなる。
- ルールは、ここぞと思う推定点から 10 cm の範囲内で、探し当てるものとするが、作業の前に定理の有効性を印象づけるため、直感から決めた場所を、班の代表者に探してもらおう。なお、現在までにこのテーマは数十回実施してきたが、直感から円の中心を発見する事はできなかった。
- まず定理 C を応用することによって、円の中心にある宝を探す。次に各班自由な方法によって、もう一度中心を探し当てることにする。



図表 1.1 円の直径を探す3定理

1.3 結果と考察

授業実施後の印象，あるいはレポートからの結果をまとめると，

- a. 円の中心が発見できなかった班は，現在まで2班だけであり，成功率は約95%と高い。しかし実習後の感想を見ると，「このような道具だけでは到底見つからないだろうと思った。」などの記述が多い。自分の班で作成した円の正確性に対して，多くの場合不安が伴っている事と，探索できる範囲が推定点から10 cmと狭い事などの理由から，最終的に発見出来た事への驚きに結びついているように思われる。
- b. 中心を探す事のできる許容範囲は，紙上でも，校庭上でも $\pm 1\%$ （校庭では ± 10 cm）と誤差率を同じに設定してあるが，校庭の方が困難に感じている。主な理由をみると，「広い場所で考えようとする」と，頭の中が白くなる感じ，「紙上での方法を頭に入れて，宝探しに臨んだが，手順が進むにつれて，今どこ，何をやっているのかわからなくなり，指示待ちをしていた。」との感想に代表されるように，定理の一通りの理解では，応用のためには不足気味である事が挙げられる。
- c. 共同作業の意義として，全体を見ながら定理と照らし合わせる人，作業を行う人など，役割分担とチームワークの大切さを実感したとの感想が多い。また身体を使った作業の後，達成できたものが知的であるためか，普段教室では見られない各学生の側面を知ることが出来，今後の指導のため参考になった。

2. 近似と積分：三角錐の体積を例に

2.1 目的

高等数学も，発想は素朴であることを理解する。このため積分を例として取り上げ，積分とは複雑な形状に対し，簡単な形を集積した近似であることを学ぶ。具体的には円錐を取り上げ，この体積は，対応する円柱の $1/3$ として知られている体積係数を，皆の手計算を通じた協力によって近似的に求め，積分の考えを実感する。

2.2 授業内容

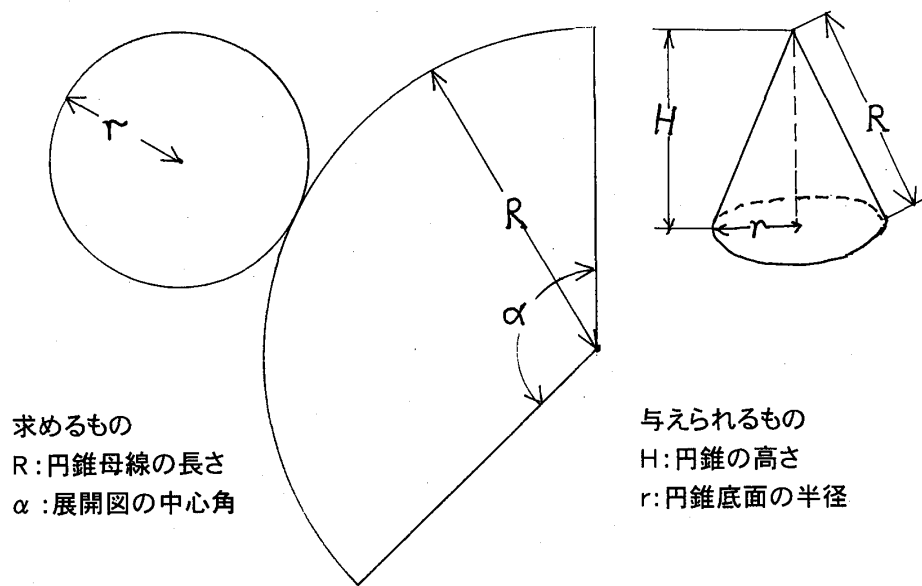
2.2.1 円錐の製作（図表2.1）

積分計算に先立って，まず円錐を紙で各自が製作する事を行う。この際の条件は，円錐の高さと底面の半径が指定された数値であり，この円錐を1回で正確に作る事とした。よって微調整しながら寸法を合わせる事ができないので，次式と同等の計算に頼る事になるが，授業では展開図や数式は提示していない。なお，次式の母線とは円錐側面図における斜線の事で，扇形とは円錐側面を展開した形の事である。

$$\text{母線長 } R^2 = \text{高さ } H^2 + \text{底面の半径 } r^2$$

$$\text{扇形の半径} = \text{母線長 } R$$

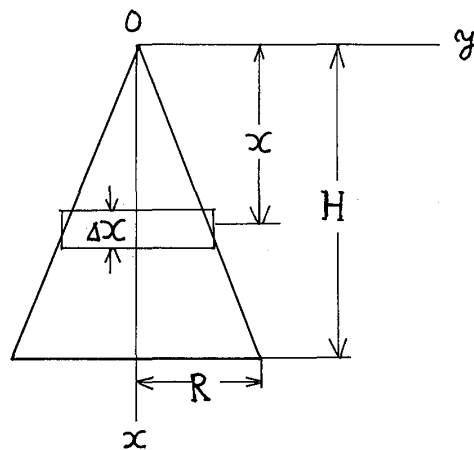
$$\text{扇形の中心角 } \alpha = 360 \times \text{底面の半径 } r / \text{母線長 } R$$



求めるもの
 R : 円錐母線の長さ
 α : 展開図の中心角

与えられるもの
 H : 円錐の高さ
 r : 円錐底面の半径

図表 2.1 円錐の展開図



図表 2.2 積分より円錐体積を求める

2.2.2 積分による体積公式 (図表2.2)

円錐の体積係数 $1/3$ は, 解析的には次の積分から求められる。これによって積分とは, 小さい部分の積重ね近似である事がわかる。円錐に対する近似図形を作るため, 図のように, 厚さ Δx の輪切り部分すなわち平たい円柱を積重ねたものを考える。頂点からの距離 x における輪切り部分の半径は xR/H となり, 輪切りの厚さは Δx であったから, この輪切り部分の体積は次のように表す事ができる。

$$\Delta v = \pi (xR/H)^2 \Delta x$$

円錐底面の半径: R

円錐の高さ: H

このような輪切り部分の厚みを 0 に、積重ね個数を無限個に近づけた極限を考える。

$$\begin{aligned}\text{円錐の体積} &= \sum \Delta v \rightarrow \pi \int (xR/H)^2 dx \quad (0 \leq x \leq H) \\ &= (1/3) \pi R^2 H\end{aligned}$$

以上が円錐の体積係数 $1/3$ を積分により求める方法であるが、その発想を考えると、平たい円柱である輪切り部分を、積重ねる事によって円錐を近似している事が分かる。

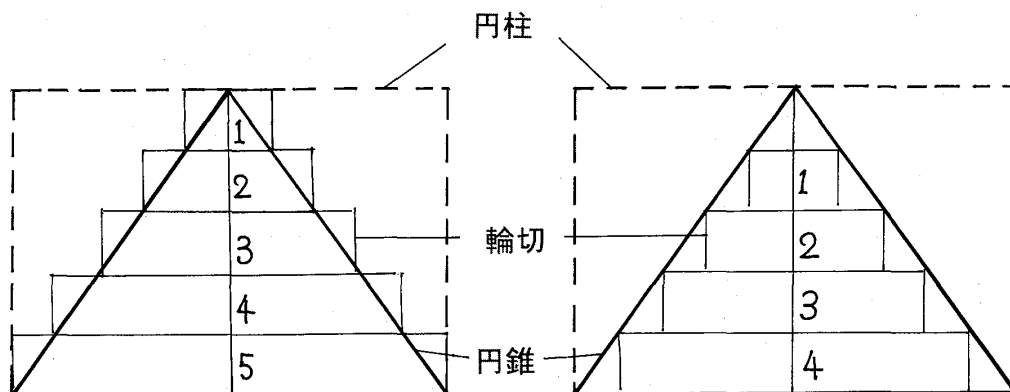
2.2.3 輪切り部分による近似計算

上述の積分と同様に、円錐を、輪切り部分の積重ねによって近似することを考える。実寸による円錐側面図を描き、各輪切り部分の厚みは、計算が便利のように 1 cm に統一し、対象とする円錐の高さと底面の半径は、積重ね段数に依存して自由に変化するものとする。また、積重ねの段数は、5 ～ 20 段程度とした。円錐の体積係数 $1/3$ を未知数 α とし、円錐の体積の代わり、輪切による近似体積を用いる事によって、次式のように未知数 α を推定する。

$$\text{体積係数 } \alpha = \text{円錐の近似体積} / \text{円錐と同一高さの円柱の体積}$$

2.2.4 大き目近似、小さ目近似 (図表2.3)

前述の式より円錐に対する図形上の近似が大き目になると、体積係数 α も、これに比例して大き目となる。そこで次からは、体積係数 α の近似が大小である事と、円錐に対する図形的な近似が大小である事を同様に扱う。一般に未知数を近似的に求めるには、未知数より大きい事がわかっている側からの近似と、小さい側からの近似を同時に行うのが有効である。図では円錐の側面図を表しているが、大き目近似とは、各輪切り部分の底面が円錐と一致し、上部は出っ張るような近似 (図表では高さ 5 cm の円錐に対して 5 段積重ね)、一方、小さめ近似とは、各輪切り部分の上面が円錐と一致し、下部は円錐内に納まるような近似 (図表では高さ 5 cm の円錐に対して 4 段積重ね) を言う。



図表 2.3 大き目近似 (左)、小さ目近似 (右) の側面図

2.2.5 積重ね段数を変化 (図表2.4)

円錐の真の体積に対して体積近似を正確にするためには、輪切り部分の積重ね段数を多くすれば良い。そこで各人が異なる積重ね段数を計算する事にした。前述のように輪切り部分の厚みは1 cm に統一しているが、その半径は定規によって実測する事として、直感的な近似図形という要素を表に出した。図表2.4に円錐の高さ5 cm の計算例を示す。

図表2.4 輪切りの積重ね5, 4段による計算例

大き目近似			小さ目近似		
段	半径(cm)	体積 (cm ³)	段	半径(cm)	体積 (cm ³)
1	0.7	$\pi \times 0.7^2 \times 1.0 = 0.49 \pi$	1	0.7	$\pi \times 0.7^2 \times 1.0 = 0.49 \pi$
2	1.4	$\pi \times 1.4^2 \times 1.0 = 1.96 \pi$	2	1.4	$\pi \times 1.4^2 \times 1.0 = 1.96 \pi$
3	2.1	$\pi \times 2.1^2 \times 1.0 = 4.41 \pi$	3	2.1	$\pi \times 2.1^2 \times 1.0 = 4.41 \pi$
4	2.7	$\pi \times 2.7^2 \times 1.0 = 7.29 \pi$	4	2.7	$\pi \times 2.7^2 \times 1.0 = 7.29 \pi$
5	3.5	$\pi \times 3.5^2 \times 1.0 = 12.25 \pi$			
近似計		26.40 π	近似計		14.15 π
円柱		$\pi \times 3.5^2 \times 5.0 = 61.25 \pi$	円柱		$\pi \times 3.5^2 \times 5.0 = 61.25 \pi$
体積係数		$26.40 \pi / 61.25 \pi = 0.431$	体積係数		$14.15 \pi / 61.25 \pi = 0.231$
		0.431は1/3より大き目			0.231は、1/3より小さ目

2.3 積分近似の結果と考察

2.3.1 円錐の製作について

円錐の紙による製作は、教室で簡単にできるので、気分転換のためにも毎年実施しており、各自の完成品と「作り方説明書」とをレポート課題としているが、その結果をまとめると、

- 大多数の学生が指定寸法の円錐を正確に完成している。レポートの感想から、計算式を最初から立てられた者は少数のようであるが、互いに教え合い、協力して完成した結果となっているのがわかる。一方、毎年少数の者が、円錐の高さと、母線とを混同しているのが見受けられ、協力と試行錯誤が必要である事が伺われる。
- 円錐の作り方説明書については、「製作するより難しかった。」との感想が多く、系統立てた説明方法の練習になっていると思われる。

2.3.2 円錐の体積係数1/3について (図表2.5)

- クラス全員の計算による、円錐の体積係数1/3に対する、近似結果の一例を図表2.5に示す。これより多少の変動はあるが、輪切り部分の積重ね段数が多くなるに従い(近似精度が良い)、大き目近似では体積係数の真値1/3より大きい値を保ちながら、真値に近づき、一方、小さ目近似では、真値1/3より小さいが、次第にこれに近づく事がわかる。
- 便宜的に大き目、小さ目、両近似値の平均を取ると、積重ね段数によらず、体積係数の真値1/3付近の値となっている。

図表2.5 体積係数 $1/3$ に対する近似結果

円錐の高さ (cm)	人数	大き目近似	小さ目近似	平均
5	4	0.433	0.233	0.333
6	5	0.420	0.253	0.337
7	2	0.397	0.269	0.333
8	2	0.397	0.272	0.335
9	1	0.392	0.281	0.337
10	3	0.385	0.317	0.351
12	2	0.380	0.297	0.339
16	3	0.366	0.311	0.339

- c. 円錐の体積係数 $1/3$ をめぐる代表的な感想を次に紹介すると、
「小学校のときは円錐の体積を求めるとき、どういう理由で $1/3$ を掛けるのか分からなかったが、やっと今その謎が解けたような気がする。」
「私たちが小学校や中学校でやってきた数学は、昔の人の発見の下にあった事に気付かないで、計算していた。」などである。

3. 加速度と慣性：エレベータによる実験

3.1 目的

日常的に経験する物理現象のうち、加速度が関係するものを対象とし、これを簡単な数式でモデル化することによって、乗物など、身の回りの安全性に対する理解を深める。具体的には自動車の衝突の場合、あるいは重量物に地震動が加わった場合、想像以上の挙動となる事を、エレベータ実験を通し導いた数式から推定できるようにする。

3.2 授業内容とその結果

3.2.1 基礎概念の理解

授業ではまず、日常経験する物事、例えば、乗車している車両などが、加減速運動を行う場合、車内の人、物に加わる力を理解する。このため、加速度と、慣性の法則などを次のように整理し、把握する。

加 速 度：速度の大きさ、または方向（円運動など）の時間に関する変化。

始めの速度方向を+とすれば、減速度は-の加速度となる。

地球の重力加速度、すなわち空気抵抗無視の自由落下加速度は 1 G である。

なお、 1 G は 9.8 m/s^2 である。

横方向の場合も含め、加速度を 1 G に対する比で表し、 G 加速度とする。

慣性の法則：「物体は従来運動を保持しようとする」と表現され、具体的には、停止中の物を急に動かすとき（物に加速度が加われば）、反対方向に力を感じる。
逆に動いている物を急に止めようとする（物に負の加速度が加われば）、元

の動きを保とうとする力を感じる。このような力が意識される現象を慣性という。

慣性力：この急に感じる力を慣性力とする。物理学では一般に、慣性力の代わりに、加速度を生じさせる力を外力として考えるが、乗物など、日常においては、外力は意図せずに加わる事が多いので、現象を理解するには、直感的な「感性力」による方が便利な事が多い。その方向は、加速度と反対方向であり、大きさは次式のように簡単に表される。つまり1 Gの加速度が加わるときの慣性力は、その物の重量と同一の力となる。

$$\text{慣性力 (kg 重)} = \text{乗車中の人, 物の質量 (kg)} \times G \text{ 加速度} \quad (\text{式3.1})$$

重量, 力：重量は物が地球上で持つ重さなので、地球引力による力とも考えられる。よって、重量と力は同一のものであり、ここでの単位は (kg 重) とする。

質量：物は宇宙空間においても加速させるためには力が必要となる。つまり外力は物の加速度に比例するが、この比例定数を質量と呼び、単位は (kg) としたものである。なお便宜のため、地球上では重量と質量は同一の数値となるようにしている。

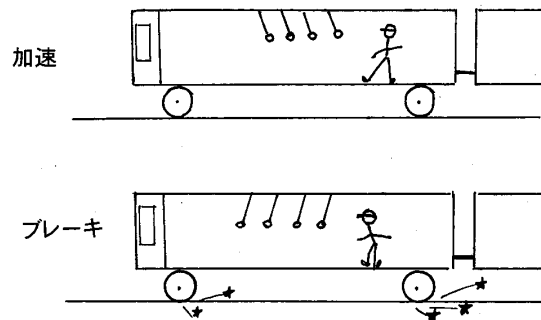
3.2.2 慣性の法則についての演習

まず、慣性の法則が、実際の場面でどのように働くかを理解するため、水平方向と、垂直方向とに分けて考える。

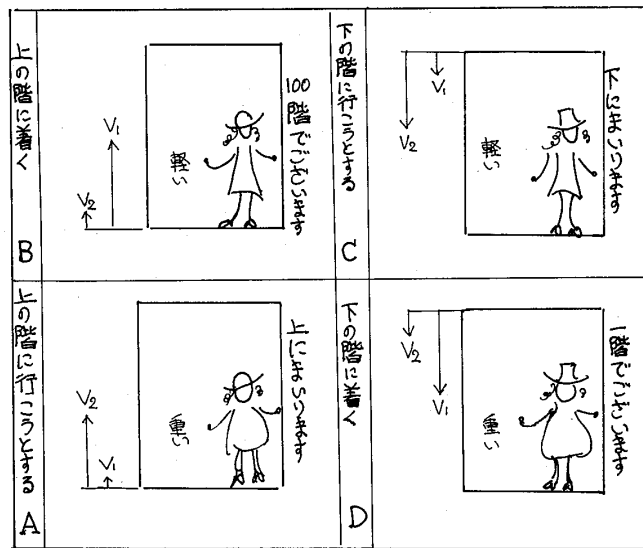
水平方向：物に水平方向の加速度が加わった場合を考える。物の重量はこれと直角方向に働くので、水平方向には関与しないが、物には質量があるので、これについて慣性の法則を適用するか、又は慣性力を (式3.1) のように求める。

垂直方向：物に垂直方向の加速度が加わった場合も、慣性の法則、又は慣性力 (式3.1) によって考える。加速度が垂直方向のときは、慣性力によってその分だけ重量変化が生じるので、感覚的には水平方向と異なって感じられる。

- a. 水平方向の加速度についての演習として、電車が、発車した場合と、停車する場合とでは、吊革が揺れる方向は各々どのようなようになるか、理由と共に記入する。(図表3.1) なお、この場合は乗客の視点から、慣性力を考えた方が吊革の運動を理解しやすい。
- b. 垂直方向の加速度の演習として、下の階から適当な上の階まで往復するエレベータの運動を対象とした。そのとき、人は自分の体重が重くなったように感じるか、軽く感じるかを示す。(図表3.2) なお、の場合は、慣性の法則で考えたほうが理解しやすい。



図表3.1 電車内における吊革の揺れと慣性



図表3.2 エレベータ乗車中の感覚と慣性

3.2.3 エレベータ内での重量変化測定

- a. エレベータの上下運動に伴って、物体の重量は変化するが、これを測定する為の手順を示す。電子秤に 500 g 程度の重りを載せ、エレベータの床に置いた状態において、重量 0 にセットし、これを測定の初期状態とする。するとエレベータの上下動に伴った、秤の指示重量は、重りの重量変化を示す事になるので、これは（式3.1）より、そのまま慣性力の大きさとなる。これより、エレベータの G 加速度は次式で表す事ができる。ここで (g) は質量、(g 重) はその質量が地球上で持つ重量（力）として扱う。

$$\begin{aligned} \text{エレベータの G 加速度} &= \text{慣性力 (g 重)} / \text{重りの質量 (g)} \\ &= \text{目盛りの変化 (g 重)} / \text{重りの質量 (g)} \end{aligned} \quad (\text{式3.2})$$

- b. 実験は 3 号館のエレベータを用い、1 階から 4 階までを往復した。これにより、図表 3.2 に示した 4 ケースが含まれる事になる。各ケースにおける最大の目盛り変化を読

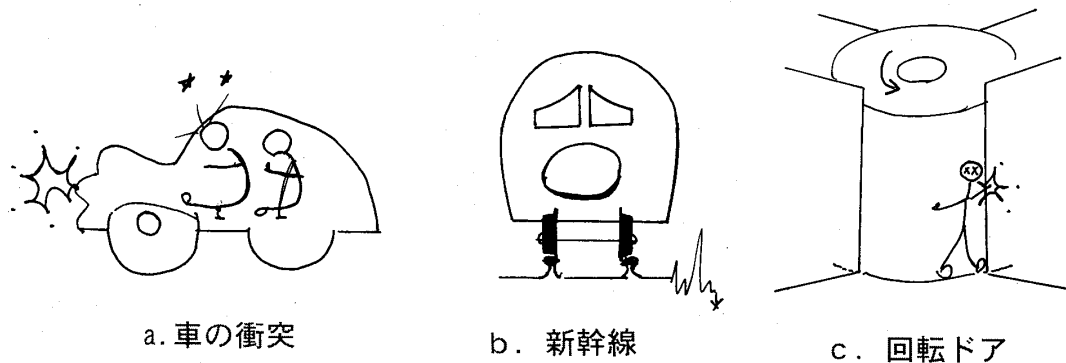
み取るが、誤差を伴うので、酔って気持ち悪くなくても、原則3往復した。なお、エレベータが移動中でも、速度が一定に達すると、加速度が加わらないので、重量変化は0となる。

- c. エレベータの、上下階移動による、重量変化（慣性力）の測定結果は、500 gの重りに対して30～40 g、すなわち数%の変化率となった。これを人の体重変化に直すと3～4 kgとなり、
「エレベータで上の階から下る時、ふわっと浮く感じがしたり、下の階で止まる直前に、押されてから元に戻るような感じがした原因が分かってよかった。」などが代表的な感想であるが、加速度が上下方向に加わる時は、人体内部のすべて質量のあるものに、加速度相応の重量変化が起こるので、感覚的には左右方向とは別の物理現象と誤解しがちである。なお、(式3.2)より、重量の変化率は、そのままG加速度と同じ数値であったので、実験に用いたエレベータの上下加速度は約0.07 Gといえる。

3.2.4 安全性への応用問題 図表 (3.3)

慣性の法則に関する実用例を各自が考える課題である。配付資料における例では、そのような現象となる理由が、慣性の法則から示されているので、これをヒントにして、安全性を考える事を期待している。

- a. 車が時速55 km/hで正面衝突したときには、安全装置があっても、50 G前後の衝突加速度が加わる。すると乗車中の人には、(式3.1)から、体重の約50倍、2500～3000 kg重の前向き慣性力が加わる事になる。シートベルトなどの安全装置無しで、これを支える事はとても出来ない。ちなみに、安全装置が作動するような加速度を検出する原理自体も、やはり中に組み込んだ小さな重りに加わる慣性力を利用している。
- b. 新潟地震では最大1 Gの上下加速度が観測された。いま、上下方向だけを考えると、地面が1 Gの加速度で下方に揺れた瞬間は、列車は慣性の法則により、元の地面の位置に留まろうとする、すなわちレール上に浮いている事になる。レールが少しでもカーブしていれば、脱線となるが、これが現実化したと推定されている。逆に地面が上方に1 Gの加速度で揺れた瞬間は、(式3.1)より自重と同じ慣性力が下向きに加わる事、すなわち重量が瞬間的に2倍となるので、建築物の場合、横揺れと共に、崩壊の危険性を増大させると解釈できる。
- c. 回転ドアは当初は軽量素材で作られていたが、高級志向のため、重量感溢れる素材が使用されるようになった。回転ドアは、たとえゆっくり回っていても、非常に大きな慣性を有している事になる。これは、回転ドアを止める事を考えれば、大きい力が必要となる事からもわかる。一般に事故が発生したときは、結果的に人体によって重量物を急に止めた事に対応するので、破壊力となる慣性は(式3.1)が示すように、質量だけでなく、負の加速度の分も掛け合わせて増大していた事になる。



図表3.3 乗物の安全性と慣性

あとがき

数学教育Ⅰ，Ⅱの中から，今回取り上げた「円の中心を探す」，「近似と積分」，「加速度と慣性」について今後の課題など，気付いた点をまとめると，

- 「円の中心を探す」では，屋外における実習的な性格が強かったが，体を使った作業の利点がある反面，数学的な内容の理解が不十分でもグループ内で参加できるので，この点は課題があると感じる。また，授業の傾向として，ハイテク機材の使用を避け，数学原理を前面に出した構成は，今後，他のテーマについても継続していきたい。
- 「近似と積分」で扱ったように，高等数学と見做されている他の方法についても，素朴な発想に由来している事を示していきたい。これは数学の実用性を理解するだけでなく，一般に不得手な分野がアレルギーのままで終わらないようにしたいためである。
- 「加速度と慣性」は物理の話題であるが，一般に分析方法は簡単な程，望ましいことを示した。すなわち，単位系，物体の慣性などは専門課程用のものでなく，直感的に理解しやすいものを採用した。これにより，社会的にも問題となっている，乗物などの安全性について理解するのに役立てる事ができたように思われる。
- 最後にレポートを主とした授業の結果を，この報告1，2で述べてきたが，学年末を過ぎると，返却に困難がある事，および最小限の数学基礎の理解度を確認したい事から，今後は試験併用の必要性を感じている。

文献

- (1) 土井努：「文科系の学生を対象とした数学教育の研究1報」本大学紀要39号，2005年
- (2) 吉田武：「虚数の情緒－中学生からの全方位独学法」東海大学出版会 2004年
- (3) 原島鮮：「力学1－質点，剛体の力学」裳華房 昭和59年
- (4) 今井功監訳：「パークレー物理学コース1 力学」丸善 平成3年

Mathematical Education for the Students of Social Science and Language Courses (the second report)

Tsutomu Doi

This paper is the sequel to the first one published in 2005. In this report three subjects are addressed according to what the author had produced for mathematical education classes at I.C.C. The subjects are ① survey the center of a circle where a treasure has been hidden ② integral and approximation using a cone as an example ③ acceleration and inertia through an elevator experiment.

- ① This subject was carried out in the campus ground with non-high-tech instruments in order to let the students know mathematical theorems are applicable to daily life.
- ② In this subject the basic way for understanding the integral method was first introduced. A manual calculation by each student was carried out for approximating the volume of the cone to understand that the volume is getting close to $1/3$ that of a cylinder as the approximation becomes more precise.
- ③ In the first phase we measured how weight varies in an elevator to understand the law of inertia. With this knowledge dynamic safety was discussed about some cases when riding in vehicles ,etc. which have brought upon social problems lately.