茨城キリスト教大学紀要第44号　177
社会科学　p.177～186

“数学の証明法”のどのような側面に“美しさ”を感じるのか？

立木　　徹*・伏見　陽児**

数学の公式や定理の証明について，その証明の仕方のどのような側面に「美しさ」を感じたか，大学生を対象に調査を実施した。因子分析した結果，数学の公式や定理の証明法の「美しさ」は，証明の簡潔性，展開の雄大性，手法の意外性，証明の巧緻性，疑問の解消性，の５つの下位因子から構成されていることが示された。

「理系学生か文系学生か」「数学が好きか嫌いか」による差異を比較したところ，「証明の簡潔性」因子は「理系か文系か」「数学の好き嫌い」のいずれにも影響されなかった。それに対し「展開の雄大性」「手法の意外性」「証明の巧緻性」「疑問の解消性」の各因子においては「数学の好き嫌い」が影響し，数学好きの者の方が高い評定を与えた。

問題と目的

教育の世界において知識教育と情操教育との関連がさかんに論議されている（天ケ瀬，2008；藤井，1998；藤田，1985；井澤，1989；野口，2000；大阪，1998；柴田，2004：土屋，2008：山松，1987　等）。情操教育とは，暗記偏重の知識の教育に対して，真・善・美・聖などの価値感情を育み，個性的な心の働きを豊かにするための教育とされる。

心理学的には，情操（sentiment）とは「学問・道徳・芸術・宗教などのある一定の文化価値を持った事物に関して起こるいろいろな感情の統合された全体」（大槻，1957）をいう。また情操は「比較的複雑な，殊に知的作用に伴う静かな，高尚な感情」で，「知的感情（intellectual feeling）」とも言われ，「情緒などとは異なって，本能や欲求との直接的関係がなく，顕著な身体的変化も伴わず，また気分のような漠然とした有機感覚とも関係がなく，個人の修養や教養の程度により著しい差を生じる」ものである（中野．1956）ことも指摘されている。

知識教育と情操教育との関連についてはさまざまなとらえ方がなされているが，土屋（2008）は「知識教育の内容には，情操教育にかかわる知識が含まれており，情操教育に向かって，知識教育からの通路が開かれている」と論ずる。この主張は，科学的知識の学習によって情操も育成され得るとする立場，すなわち「科学的知識→情操」という方向性を重視する立場とみなすことができる。

リチャーズ，A.は自然科学者へのインタビューを通して，多くの自然科学者は美的満足感に支えられていることを指摘する（Worpert,L. & Richards,A.,1997）。たとえば生物学者のフード，L.は，生物学的な系を研究するとそこに「単純でエレガントな美」が見えて

*茨城キリスト教大学生活科学部
**千葉大学教育学部

くると述べる（Worpert,L. & Richards,A.,1997）。また物理学者のサラム，A.は，素粒子物理学のきわめて異様な性質について畏怖を感じると言う（Worpert,L. & Richards,A.,1988）。これらは科学的知識が情操を生起させることを示す見事なエピソードといえる。

しかし教育の世界では土屋（2008）のとらえ方とは反対に，むしろ「情操→科学的知識」の方向を重視する立場の方が優勢である（たとえば天ケ瀬，2008）。伏見・立木（2009a）は，現職教師や教育学部学生を対象にして，「科学的知識の学習が進むと，当該領域に関する情感（情操）も育成される」という主張と，「ある領域に関する情感（情操）が育成されると，当該領域の学習も進むようになる」という主張のどちらにより賛成の程度が大きいか（反対の程度が小さいか）を尋ねた。すると多くの者が後者の「情操→科学的知識」の主張を選択した。

これに対して，伏見・立木（2009b）は教科教育場面においては「科学的知識の獲得によって，当該領域に関する情操も生起し得る」（科学的知識→情操）というとらえ方を重視すべきだとする立場に立ち，その主張を補強するデータを実験により示した。実験１では，大学生40人を対象にして「人間の背骨」の特徴を記述した読み物教材を読ませた。その結果，当該学習内容をより良く学習した者の方がそうではなかった者に比べ，背骨の仕組に「すごさ」「すばらしさ」などの情感をより多く生起させた。実験２では大学生80人を対象に「親潮と黒潮」という内容が「気体の溶解度」と関連づけられた場合の情感の生起について検討がなされた。実験の結果，両者が関連づけられると，関連づけられなかった場合に比べ，自然の仕組の「すばらしさ」や「美しさ」に強い情感を生起させる者が多く生じた。この伏見・立木の研究は，科学的知識の教育と情操教育を論議する際に重要な情報を提供するものとして意義あるものといえる。

知識教育と情操教育の関連については理科教育に限らず，さまざまな教科領域で問題となるはずである。学習内容それ自体の把握とともに，学習内容にある種の情感を生起させることは，学習において重要な側面だからである。本稿で取り扱う「数学」について述べる。

形式科学の代表である数学の世界では古くから「数学の美しさ」についての言及がなされてきた。『世界大百科事典』（平凡社）の「数学」の項では次のように述べられている。

> 歴史的には，土地測量や商業や金銭取引，航海や宮殿の建設など，実用上の必要から用いられ発展してきた数学は，一方では自然現象の法則性を解明するための基本的方法およびその強力な手段を提供してきたが，その理論が実用に結び付くことをつねに意識して研究されてきたわけではない。むしろ数学に内在している論理に対する純粋に知的な好奇心からの研究が，往々にして独創的な理論を生み出してきた例が多い。これは数学が，芸術にも似た創作的な分野であることによる。つまり，人間精神の１つの表現としての数学は，論理的厳密さ・簡潔さへの志向性と美的完成への願望が反映されているものであり，その基本的要素は，論理と直感，解析と構成，一般性と個別性からなる。

また，Wikipedia（2011，5．6.）の「数学」の項では次のように説明されている。

> 数学とは，狭義には伝統的な数論や幾何学などの分野における研究とその成果の総

称としてまたそれらの成果を肯定的に内包する公理と推論からなる論理と理論の体系を指して言うものである。また広義には，超数学（メタ数学）などと呼ばれる枠組みにしたがって公理と推論規則が定められた体系一般を指す。現代的な数学においては，公理的に定義される抽象的な構造を，数理論理学を共通の枠組みとして用いて探究する。方法論の如何によらず最終的には，数学としての成果というものは他の自然科学のように実験や観察によるものであってはならない。

数学，特に伝統的な純粋数学では数学研究が自己目的化されており，数学への内的な興味のために研究がなされる。このような数学ではいかに本質的な概念なり定理なりを得ていかに体系的な数学を構築するかが重要視されており，数学的対象を記述するのに適した概念や空間を定義したり，数学的事象をうまく表現した定理を得たりする事が数学者の主な仕事である。一方で，美的な理由からそれぞれの分野での研究をしている数学者もいる。彼らは対称性や直観性などその独特の審美眼を以て，数学を芸術に近しいものとみなしているのである。

数学者自身は数学の美についてどのように考えているのだろうか。Wikipedia（2011,5.6.）の「数学的な美」の項には，次のような記述がある。

多くの数学者は彼らの仕事，一般的には数学そのものから美学的な喜びを覚えている。彼らは数学（あるいは少なくとも数学のある種の側面）を美として記述することにより，この喜びを表現している。数学者は芸術の一形態あるいは少なくとも創造的な行動として数学を表現している。このことはしばしば音楽や詩を対照として比較される。(中略)

ハンガリーの数学者ポール・エルデシュは数学の言語での表現不可能性に関する彼の見解を次のような言葉で表現した。「数は何故美しいのか。それはベートーベンの交響曲第九番がなぜ美しいのかと訊ねるようなものだ。君がその答を知らないのであれば，他の誰も答えることはできない。私は数が美しいということを知っている。もし数が美しくないのなら，美しいものなど何も無い」

また『世界大百科事典』（平凡社）の「数学」の項でも，次のように記されている。

19世紀前半のドイツには，代数学，解析学，幾何学の各方面に大きく貢献した大数学者ガウスがいた。彼は，ゲッティンゲン大学在学中の19歳のとき，円に内接する正17角形の作図に成功し，「このような円分理論における整数論的法則は天文学上のいかなる法則にも劣らず美しい」と歓喜している。このことばは，古代ギリシャにおける数学の研究によって人間の魂を善のイデアにまで高めたプラトンのことばに匹敵し，数学における審美精神の復興を告げるものであり，この精神が19世紀の純粋数学の大発展をもたらしたのである。

実際，数学の美しさについての情感は，数学にかかわる多くの者に認められる。あらゆる数学者から美しい公式と評され，「人類の至宝」とも言われるのが，オイラーの公式「$e^{i\pi}+1=0$」である。たとえば加藤（2007）は「その驚異的な外観のシンプルさに加えて，目をみはるほどの意外性も持っている。のみならず，それはどこまでも人の心を捕えて離さない奥深さも感じさせる」と自らの心の内を披瀝している。

算数・数学教育の世界においても「数学の美しさの感得」をめざした教育研究がさまざ

まになされ，報告されている（金子, 2010；國本, 2009；斎藤, 1990；白石, 1996；松尾, 1999　等）。確かに学習内容の把握だけでなく，そこに「美しさを感得」することは重視されるべきことであろう。しかしながら，数学のどのような側面に「美しさ」を感じるのか，感じ得るのかについては不明瞭なままである。

そこでここでは研究の出発点として，大学生を対象にして，「数学の公式や定理の証明」を取り上げ，証明の仕方のどのような側面に「美しさ」を感じた（感じる）のか質問紙調査を実施し，検討することにした。

方　法

調査概要

B県にある国立大学法人C大学の学生76人を対象に調査を行った。調査時期は2011年１月であり，いずれも講義の最後の時間に実施した。調査を行った講義は，全学部向けの教養科目「人間行動と社会」，および教育学部小学校課程科目「教え方と子どもの理解２」である。回答者には理系学部生と文系学部生どちらも含まれており，前者は受験時にセンター入試で数学Ⅲまでが課され，後者は数学Ⅰが必須科目として課された者であった。回答時間は10分弱。

質問紙の構成

質問紙は，所属学部，中学校時の数学の好き嫌い（「好きな方だったーどちらかと言えば好きな方だったーどちらかと言えば嫌いな方だったー嫌いな方だった」の４択）をまず尋ね，そのあと「数学の公式や定理の証明」についてどのような時に「美しい」と感じたのか，17項目それぞれに７件法（６．強くそう感じたー５．そう感じたー４．少しそう感じたー３．どちらとも言えないー２．あまりそう感じなかったー１．そう感じなかったー０．全くそう感じなかった）で尋ねる構成になっている。

回答依頼の文は次の通りであった。「“数学の美しさ”という言葉を耳にすることがあります。“数学の美しさ”とは何なのでしょうか。公式がシンメトリーを示す, 一見複雑に見える式が非常に簡単になる, 等々いろいろあると思います。ここでは“公式や定理の証明”にしぼってお尋ねしたいと思います。みなさんは小学校，中学校，高等学校を通し，これまでどんな時に“公式や定理の証明”を美しいあるいは素敵だと感じましたか。下の項目のそれぞれについて該当するものに○印をつけて下さい」。

これら17項目は，前もって５名を対象に行ったインタビューの結果に基づいて作成したものであり，次の通りである。

項目01：証明が意外な方法で行われている時
項目02：証明がすっきりしている時
項目03：証明が単純明快な時
項目04：証明があざやかな時
項目05：証明の展開に無駄がない時
項目06：証明が新しい視点から行われている時
項目07：証明が巧みな時

項目08：証明が分かりやすい時
項目09：証明が簡単に行われている時
項目10：証明にひらめきが感じられる時
項目11：証明に神秘的な感覚が伴っている時
項目12：証明の展開が壮大な時
項目13：証明の手法に驚きがある時
項目14：証明の手法が直感的に分かる時
項目15：証明によって，今までの多様な事実が結びつく時
項目16：証明によって，今までの疑問が一瞬のうちに解ける時
項目17：証明の展開が複雑な時

結　果

項目の平均と分布

17項目それぞれ７件法で尋ねた結果について，「強くそう感じた」に６点～「全くそう感じなかった」に０点を与えて得点化した平均値と，人数分布を表１に示す。

因子分析の結果

17個の質問項目を用いて因子分析を行った。因子の抽出には重み付けのない最小二乗法を用いた。因子数は固有値１以上の基準を設けたところ５因子となった。プロマックス回転を行った結果，項目14が２個の因子で負荷量が.4を超えたので，この項目を除いた16項目で再度因子分析を行った（重み付けのない最小二乗法・プロマックス回転）。その結果

表１　項目ごとの平均と反応分布

			人数分布						
		平均	６点	５点	４点	３点	２点	１点	０点
01	意外な方法で行われている時	3.97	９人	21人	24人	９人	10人	―	３人
02	すっきりしている時	4.50	16人	29人	19人	５人	５人	―	２人
03	単純明快な時	4.14	12人	23人	18人	12人	10人	―	１人
04	あざやかな時	4.43	17人	24人	22人	５人	５人	２人	１人
05	展開に無駄がない時	4.09	10人	26人	16人	12人	10人	１人	１人
06	新しい視点から行われている時	4.11	14人	22人	16人	14人	４人	４人	２人
07	巧みな時	3.82	10人	19人	15人	17人	11人	２人	２人
08	分かりやすい時	4.25	12人	25人	19人	13人	５人	１人	１人
09	簡単に行われている時	3.88	10人	22人	13人	15人	13人	２人	１人
10	ひらめきが感じられる時	4.51	17人	31人	12人	９人	５人	１人	１人
11	神秘的な感覚が伴っている時	2.99	５人	７人	11人	29人	12人	７人	５人
12	展開が壮大な時	2.71	１人	９人	10人	22人	20人	９人	５人
13	手法に驚きがある時	3.80	７人	19人	22人	16人	７人	２人	３人
14	手法が直感的に分かる時	3.87	８人	18人	28人	６人	11人	４人	１人
15	今までの多様な事実が結びつく時	4.83	26人	27人	15人	３人	３人	１人	１人
16	今までの疑問が一瞬のうちに解ける時	4.80	27人	25人	14人	４人	４人	２人	―
17	展開が複雑な時	2.11	―	６人	６人	16人	23人	12人	13人

得られた因子パターンを表２に示す。なお因子間相関は表３のようになった。

第１因子は「証明が単純明快な時」「証明が簡単に行われている時」「証明がすっきりしている時」「証明が分りやすい時」に対して負荷量が高く，「証明の簡潔性」の因子とした（Cronbachの α 係数 .79）。

第２因子は「証明に神秘的な感覚が伴っている時」「証明の展開が壮大な時」「証明の展開が複雑な時」で負荷量が高く，「展開の雄大性」の因子とした（Cronbachの α 係数 .79）。

第３因子は「証明が意外な方法で行われている時」「証明の手法に驚きがある時」「証明にひらめきが感じられる時」で負荷量が高く，「手法の意外性」の因子とした（Cronbachの α 係数 .77）。

第４因子は「証明の展開に無駄がない時」「証明があざやかな時」「証明が巧みな時」で負荷量が高く，「証明の巧緻性」の因子とした（Cronbachの α 係数 .77）。

第５因子は「「証明によって今までの疑問が一瞬のうちに解ける時」「証明によって今までの多様な事実が結びつく時」「証明が新しい視点から行われている時」に対して負荷量が高く，「疑問の解消性」の因子とした（Cronbachの α 係数 .72）。

群別・因子別の分散分析の結果

「理系か文系か」（R群／B群）「中学時代に数学が好きだったか嫌いだったか」（H群／L

表２　因子分析結果（重み付けのない最小二乗法／プロマックス回転）

	因子				
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
Ⅰ．証明の簡潔性					
証明が単純明快な時	0.986	0.068	0.172	-0.175	-0.015
証明が簡単に行われている時	0.679	0.021	-0.346	0.078	0.109
証明がすっきりしている時	0.503	0.003	0.305	0.087	-0.002
証明が分かりやすい時	0.474	-0.174	0.138	0.331	0.091
Ⅱ．展開の雄大性					
証明に神秘的な感覚が伴っている時	0.019	0.828	0.021	0.132	-0.099
証明の展開が壮大な時	0.078	0.818	0.118	0.009	-0.029
証明の展開が複雑な時	-0.131	0.468	-0.053	-0.057	0.315
Ⅲ．手法の意外性					
証明が意外な方法で行われている時	-0.044	0.017	0.794	-0.056	0.049
証明の手法に驚きがある時	-0.085	0.205	0.668	0.031	0.069
証明にひらめきが感じられる時	0.257	-0.005	0.577	0.017	-0.065
Ⅳ．証明の巧緻性					
証明の展開に無駄がない時	0.159	0.158	-0.225	0.734	-0.055
証明があざやかな時	-0.100	-0.082	0.352	0.727	-0.119
証明が巧みな時	-0.098	0.058	0.022	0.606	0.241
Ⅴ．疑問の解消性					
証明によって今までの疑問が一瞬のうちに解ける時	0.134	-0.045	-0.149	0.047	0.791
証明によって今までの多様な事実が結びつく時	0.026	0.022	0.244	-0.125	0.569
証明が新しい視点から行われている時	-0.048	0.008	0.346	0.045	0.471

表３　因子間相関

	証明の簡潔性	展開の雄大性	手法の意外性	証明の巧緻性	疑問の解消性
証明の簡潔性	1.000	-0.090	0.211	0.328	0.056
展開の雄大性		1.000	0.542	0.357	0.427
手法の意外性			1.000	0.567	0.511
証明の巧緻性				1.000	0.427
疑問の解消性					1.000

表４　群別の平均

	第１因子 証明の簡潔性	第２因子 展開の雄大性	第３因子 手法の意外性	第４因子 証明の巧緻性	第５因子 疑問の解消性
RH群（16人）	4.28	2.42	4.50	4.69	4.98
RL群（５人）	4.65	2.73	4.27	4.67	4.20
BH群（30人）	4.15	3.02	4.40	4.18	4.83
BL群（21人）	3.98	2.01	3.29	3.49	4.19

群）によって，対象者76人を４群に分けた。RH群16人，RL群５人，BH群30人，BL群21人となった。４群合計で72人であり76人に達しないが，４人は所属学部あるいは中学時代の数学の好き嫌いの記入がなかったので，ここでは分類からはずしてある。

各調査対象者とも，因子分析の結果得られた５つの下位因子ごとに，項目の平均値を求め，その上で各群の平均値を算出した。表４に示したものがそれである。

RL群は５人という少人数だったので分析の対象から除き，RH群，BH群，BL群の３群について，混合計画による２要因（群間×因子間）の分散分析を行った。

分散分析の結果，群間，因子間が有意であり（順に，$F_{(2,64)}=6.59$　$p<.01$，$F_{(4,256)}=53.90$　$p<.01$），交互作用も有意であった（$F_{(8,256)}=2.12$　$p<.05$）。

交互作用が有意だったので，因子ごとにさらに分析すると，第１因子（証明の簡潔性）では３群間に有意差はなかった（$F_{(2,64)}=0.39$ ns.）が，第２因子（展開の雄大性），第３因子（手法の意外性），第４因子（証明の巧緻性），第５因子（疑問の解消性）においていずれも３群間に有意差が認められた（順に，$F_{(2,64)}=3.88$　$p<.05$，$F_{(2,64)}=7.90$　$p<.01$，$F_{(2,64)}=6.03$　$p<.01$，$F_{(2,64)}=3.36$　$p<.05$）。また群ごとに分析すると，RH群，BH群，BL群のいずれにおいても，因子間に有意差が認められた（順に，$F_{(4,256)}=27.17$　$p<.01$，$F_{(4,256)}=11.86$　$p<.01$，$F_{(4,256)}=19.12$　$p<.01$）。

多重比較を行うと次のようだった。

まず因子ごとの結果を見よう。第２因子（展開の雄大性）では，BH群の評点の方がBL群間の評点よりも有意に高かった（$MSe=1.385$　$p<.05$　$LSD=0.729$）。第３因子（手法の意外性）では，RH群がBL群よりも有意に高評点であり，BH群がBL群よりも有意に高評点だった（$MSe=1.203$　$p<.05$　$LSD=0.679$）。第４因子（証明の巧緻性）では，RH群の評点がBL群の評点よりも有意に高かった（$MSe=1.246$　$p<.05$　$LSD=0.690$）。第５因子（疑問の解消性）でもRH群の評点がBL群の評点よりも有意に高かった（$MSe=1.097$　$p<.05$　$LSD=0.648$）。第２因子～第５因子のいずれでも，RH群･BH群間に有意

差はなかった。

つぎに群ごとの結果を見よう。RH群においても，BH群においても，さらにはBL群においても，第2因子（展開の雄大性）の評点が他の4つの因子の評点よりも有意に低かった（いずれも$MSe=0.792$　$p<.05$　$LSD=0.545$）。

以上は次のようにまとめることができる。

第1因子（証明の簡潔性）は「理系か文系か」「数学の好き嫌い」のいずれにも影響されない。それに対し，第2因子（展開の雄大性），第3因子（手法の意外性），第4因子（証明の巧緻性），第5因子（疑問の解消性）においては「数学の好き嫌い」が影響し，数学好きの者の方が高い評定を与える。すなわち，数学の好き嫌い，文系理系にかかわらず，証明が簡潔だとそこに「美しさ」を同程度に感じるといえる。一方，証明の手法が鋭敏だったり，巧緻性があったり，疑問の解消につながるものだったりした場合は，数学好きの者の方が数学嫌いの者よりも，そこに「美しさ」をより強く感じるといえる。

なお，第2因子（展開の雄大性）の評点は，いずれの群でも低評定であり，証明の展開が雄大であっても，そこに「美しさ」を感じる者は相対的に少ないといえる。

考　察

ここでは，おもに表4に示した因子分析の結果から数学の証明の美しさを感じる心のしくみを考えてみたい。美しさを感じたかどうかの評定値は因子によって異なっており，疑問の解消性（第5因子）の評定値は高く，展開の雄大性（第2因子）の評定値は低い。

数学的証明は，同意できる前提から論理的推論に従って証明すべき結論に達することである。したがって，疑問の解消性とは「前提－推論－結論」のつながりが理解できることを意味している。「疑問の解消性」の評定値が高いということは，「前提－推論－結論」の全体構造が見てとれるゲシュタルト的認知と証明の美しさが関連していることを示唆するものである。

一方で，展開の雄大性（第2因子）の評定が低いという事実も，ゲシュタルト的認知と関係している可能性がある。つまり，展開が神秘的で壮大であるというのは，「前提－推論－結論」の関係が広くて全体の関係が見えにくい問題状況において数学的証明をすることである。したがって，全体のつながりを一目にして理解するのは困難である。それは，たとえば一般相対性理論における法則“$E=mc^2$”を美しく感じるためには，現代物理学全体を理解できなければ難しいのと同じである。全体構造が一瞬にしてはっきり理解できるときに美しさを感じる，という経験をした者はそれほど多くないだろう。そのことが，展開の雄大性の平均評定値が低いという結果につながったのであろう。

次に数学好きと数学嫌いによる評定値の違いを検討したい。結果の項で示したように，数学が好きかどうかは証明の簡潔性（第1因子）に影響しないが，その他の因子では数学嫌いの者の方が低い評定を与えた。たとえば，RH群（理系で数学好きの者）の第1因子，第3因子，第4因子はそれぞれ4.28，4.50，4.69と高くほぼ同じ値である。それに対し，BL群（文系で数学嫌いな者）の第1因子の値がRH群の4.28とほぼ同じ値であるのに，第3因子は3.29，第4因子は3.49であり，RH群よりも低い値である。文系で数学嫌いな者は，「手法の意外性」や「証明の巧緻性」があったとしても，RH群やBH群ほどには美し

さを感じる者が多くないのである。

なぜなのだろうか。数学が嫌いだった者は数学がわからなかった可能性が大きい。それゆえ，数学嫌いの者にとって，証明の簡潔で分かりやすかった（第１因子）にはそこに美しさを感じるものの，手法の意外性や証明の巧緻性があっても美しさを感じる「余裕」のある者が少ないのではなかろうか。

数学好きだけでなく数学嫌いの者も含めて，多くの者が定理の証明の方法に美しさを感じるためには，まず「証明が簡潔であり，疑問が解消される」ことが優先されると言えるだろう。次の段階として，「手法の意外性」や「証明の巧緻性」にも美しさを感じるようになり，最後の段階として「展開の雄大性」という認識とつながる美しさを深く感じるようになる，と言えるのかもしれない。

今回明らかになった因子項目を指標として使い，どのような証明法に対して美しさを感じるのか今後明らかにして行きたい。

文献

天ケ瀬正博（2008）　自然に対する感性と驚きから理科へ　無藤隆編著．理科大好き！の子どもを育てるー心理学・脳科学者からの提言ー　北大路書房，35－37.

藤井千春（1998）　教科教育における情操教育　教育と医学，**46**（**4**），283－291.

藤田忠男（1985）　情操の対象領域とその育成について　静岡大学教育学部研究報告(教科教育学篇)，17，183－200.

伏見陽児・立木徹（2009a）　教師や学生は情感（情操）と科学的知識の関係をどのようにとらえているか　茨城キリスト教大学紀要，43（Ⅰ），129－135.

伏見陽児・立木徹（2009b）　情感の生起に及ぼす科学的知識の学習の影響　教授学習心理学研究，6，51－60.

井澤　純（1989）　畏敬する心を育てる　児童心理10月号臨時増刊，112－115.

伊藤由佳理（2005）　数学の美と哲学　岩波書店編集部編．岩波科学ライブラリー13／ブックガイド〈数学〉を読む

金子春香（2010）　数学の美しさを感得する教材の開発に関する研究ー文字式指導に焦点を当ててー　数学教育研究（新潟大学教育学部数学教室），**45**(**1**)，5－26.

加藤文元（2007）　数学する精神　中公新書

國本景亀（2009）　子どもの美的感性を育む！　新しい算数研究，**459**，44－48.

中野佐三（1956）　情操　牛島義友他編．教育心理学事典　金子書房　275－276.

野口芳宏（2000）　不可視の力への畏怖　現代教育科学，**527**，20－22.

大阪隆夫（1998）　自然を畏れる心ー自然を貫く叡智との響存ー　探求，**17**，13－17.

大槻義一（1957）　感情　心理学事典　平凡社　104－107.

斎藤範雄（1990）　数学の美しさを感得できる授業のあり方　日本数学教育学会誌，**72**（**9**），11－20.

柴田康正（2004）　学習指導要領における「宗教的情操」ー「生命に対する畏敬の念」をめぐってー　教育，698，44－51.

白石利夫(1996)　学校数学における審美感に視点をおいた教材開発についての研究ー表現の道具としてのテクノロジーを利用してー　筑波数学教育研究，**15**，129－130.

土屋　博（2008）　情操と知識の間　学術の動向，**13**（**2**），55－57.

松尾七重（1999）　算数数学の美しさを感得するための方法　千葉大学教育学部研究紀要，**47**（Ⅰ），71－79.

山松質文（1987）　情操の発達　教育と医学，**35**(**10**)，966－973.

Worpert, L. & Richards, A. (1988)　牧野賢治訳（1991）　科学に魅せられた人びと　東京化学同人

Worpert, L. & Richards, A. (1997)　青木薫・近藤修訳（1999）　科学者の熱い心ーその知られざる素顔ー　講談社ブルーバックス

How We Find Beauty in Mathematical Proofs

Toru Tatsuki and Yohji Fushimi

The present study was conducted to measure the image of university students with regard to "beauty in mathematical proofs". An SD-method questionnaire consisting of seventeen items was administered to 76 university students. The responses were factor analyzed. The results showed that five factors affecting images of university students were succinctness in proof, grandeur of development, unexpectedness of technique, cleverness in proof and solution of problems.